

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Вашукевич Е.А., Лосев А.С., Голубева Т.Ю.

Томография квантовых состояний

Учебно-методическое пособие
(описание лабораторной работы)

Пробная версия

Санкт-Петербург – 2020

Содержание

Введение	3
1 Краткая теоретическая справка	4
1.1 Квантовый свет – гильбертово пространство и вектора состояния	4
1.2 Квантовые поляризационные состояния света, сфера Пуанкаре	5
1.3 Матрица плотности. Чистые и смешанные состояния	8
1.4 Двухфотонные перепутанные состояния	10
1.5 Измерения и наблюдаемые	13
1.5.1 Поляроид	13
1.5.2 Двухлучепреломляющий кристалл	15
1.5.3 Поворот плоскости поляризации	17
1.5.4 Сдвиг фаз	18
1.6 Томография квантового состояния кубита	19
1.7 Томография однокубитного квантового процесса	21
1.7.1 Процедура томографии процесса	22
2 Методика проведения эксперимента	25
2.1 Описание экспериментальной установки. Постановка эксперимента	25
3 Техника безопасности при работе с приборами	28
4 Порядок выполнения лабораторной работы	29
4.1 Алгоритм включения и юстировки	29
4.2 Томография квантового состояния кубита	30
4.3 Томография однокубитного квантового процесса	31
5 Обработка результатов эксперимента, требования к оформлению отчета.	33
6 Контрольные вопросы	35
Литература	36

Введение

Одним из краеугольных камней квантовой механики является принцип дополнительности Нильса Бора. Согласно этому принципу, "данные, получаемые при разных условиях опыта, не могут быть охвачены одной-единственной картиной; эти данные должны, скорее, рассматриваться как дополнительные в том смысле, что только совокупность разных явлений может дать более полное представление о свойствах объекта". Этот принцип хорошо проявляется на примере измерения состояния поляризационного кубита $|\psi\rangle = c_H|H\rangle + c_V|V\rangle$. Состояние кубита описывается двумя вещественными параметрами и может быть параметризовано в виде точки на сфере Пуанкаре. Однако мы не можем одновременно измерить оба параметра. Поэтому необходимо произвести несколько взаимно дополнительных проекционных измерений над набором "одинаково" приготовленных кубитов, чтобы на их основе восстановить многомерное квантовое состояние. По аналогии с восстановлением объемного объекта по его проекциям или сечениям эта процедура называется квантовой томографией.

1 Краткая теоретическая справка

1.1 Квантовый свет – гильбертово пространство и вектора состояния

Нам известен широкий спектр явлений и эффектов, которые невозможно объяснить с точки зрения классической механики или электродинамики. С начала XX века, после того как М. Планк выдвинул гипотезу о квантовании, принято считать, что правила, по которым работает микромир, регулируются законами квантовой механики. Из курса квантовой механики вам уже знаком способ описания квантовых объектов при помощи **волновой функции** $\psi(\vec{r}, t)$, в которой содержится вся информация о состоянии системы в данный момент времени. При этом, квадрат модуля волновой функции является плотностью вероятности нахождения системы в данном состоянии.

Однако существует и другой подход для описания состояния квантовой системы, разработанный П. Дираком. Согласно этому подходу, вместо волновых функций используются **вектора состояния**, являющиеся элементами конечномерного **гильбертового пространства**. Размерность пространства определяется количеством различных линейно независимых состояний квантовой системы. Например, в случае изучения квантовых поляризационных состояний, эта размерность равна 2. Тогда вектор-столбец, составленный из комплексных амплитуд вероятностей ψ_1 , ψ_2 при базисных векторах состояний принято обозначать как **кет-вектор** $|\psi\rangle$, а вектор-строку – как **бра-вектор** $\langle\psi|$. Бра- и кет-векторы связаны между собой операцией эрмитового сопряжения:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \langle\psi| = (|\psi\rangle)^\dagger = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \end{pmatrix}, \quad (1)$$

верхний индекс * означает комплексное сопряжение, а индекс † – эрмитово сопряжение. Для векторов состояния также определена операция скалярного произведения:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \phi_1^*\psi_1 + \phi_2^*\psi_2 \quad (2)$$

Часто встречается и "неестественный" порядок перемножения векторов состояния – $|\phi\rangle\langle\psi|$. Такой объект является **оператором** ранга 1 и представляет собой тензорное произведение $|\phi\rangle$ и $\langle\psi|$. Оператор вида $|\psi\rangle\langle\psi|$ называется **проектором** на состояние $|\psi\rangle$. Причину такого наименования легко понять записав действие такого оператора на некоторое состояние $|\phi\rangle$:

$$|\psi\rangle\langle\psi||\phi\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle = |\psi\rangle(\psi_1^*\phi_1 + \psi_2^*\phi_2) = (\psi_1^*\phi_1 + \psi_2^*\phi_2)|\psi\rangle \quad (3)$$

Как можно заметить, в результате действия проектора состояние $|\phi\rangle$ перешло в состояние $|\psi\rangle$.

Наличие операции скалярного произведения векторов в гильбертовом пространстве позволяет нам определить норму вектора и векторный базис пространства. **Ортонормированным базисом** мы будем называть совокупность линейно независимых единичных взаимортогональных векторов гильбертового пространства $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_d\rangle$, таких что $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}, \forall \{i, j\} \in [1; d]$. Здесь d – это натуральное число равно размерности соответствующего Гильбертова пространства. Таким образом, любой вектор состояния может быть разложен по набору базисных векторов:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d \langle e_i | \psi \rangle |e_i\rangle \quad (4)$$

Мы рассматривали до этого момента квантовые состояния в дискретном базисе. Однако возможно описание и в непрерывных переменных. Например, разложение произвольного состояния $|\psi\rangle$ по непрерывному базису собственных функций оператора координаты $|x\rangle$ (состояний с определённой координатой), будет выглядеть следующим образом:

$$|\psi\rangle = \int_0^{\infty} \langle x | \psi \rangle |x\rangle dx \quad (5)$$

Полезным будет заметить, что выражение (12) также устанавливает связь между вектором состояния и волновой функцией, потому что коэффициент разложения $\langle x | \psi \rangle$ по базису собственных функций оператора координаты $|x\rangle$ по сути и является волновой функцией $\psi(x, t)$ в координатном представлении.

1.2 Квантовые поляризационные состояния света, сфера Пуанкаре

Обобщая всё вышесказанное, перейдём к описанию поляризационных состояний одиночного фотона. С классической точки зрения свет представляет собой суперпозицию плоских монохроматических волн, и каждая волна в суперпозиции имеет определённую поляризацию. При таком рассмотрении свет проявляет свои волновые свойства в явлениях дифракции и интерференции в том случае, если характерные размеры препятствий сравнимы с длиной волны. Однако, с точки зрения базовых концепций квантовой механики, свет является потоком фотонов – квантов электромагнитного излучения. Единичный фотон может быть поглощён детектором только полностью или не поглощен вовсе – так проявляются его свойства частицы. При этом у каждого фотона тоже есть некоторая поляризация, однако в общем случае она не является определённой, а задана через суперпозицию состояний. Такое поведение света типично для квантовых систем и является отражением корпускулярно-волнового дуализма. Для описания поляризационного состояния единичного фотона мы можем не принимать во внимание амплитуду плоской волны, поскольку она является чисто энергетической характеристикой – квадрат амплитуды

в квантовом случае тождественен количеству фотонов в моде. Вектор поляризации фотона в "классическом" смысле может быть тогда записан как линейная комбинация горизонтальной и вертикальной поляризации. Проводя аналогию, любое поляризационное состояние фотона $|\psi\rangle$ может быть представлено в виде суперпозиции состояния с горизонтальной поляризацией, его мы будем обозначать $|H\rangle$ и сопоставим ему вектор столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, и вертикальной поляризацией $|V\rangle$, которому соответствует вектор столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$|\psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (6)$$

Комплексные числа α, β здесь имеют смысл амплитуд вероятности, так что должно выполняться условие $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Такое математическое описание поляризационного состояния имеет наглядную классическую "геометрическую" интерпретацию – мы, по сути, имеем дело со сложением гармонических колебаний в направлении x и y .

Оказывается удобным использовать ещё несколько базисов для описания произвольного состояния. Во-первых, это базис диагонального $|D\rangle$ и антидиагонального $|A\rangle$ состояний с поляризацией $+45^\circ$ и -45° относительно оси x :

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|H\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|H\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Во-вторых, это базис левой и правой круговых поляризаций $|L\rangle$ и $|R\rangle$:

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|H\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|H\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Все три базиса являются абсолютно равноправными, и одно и то же произвольное состояние фотона может быть выражено через линейную комбинацию базисных векторов любого из них.

Рассмотрим, например, запись состояния $|\psi\rangle = \frac{3}{5}|H\rangle - \frac{4i}{5}|V\rangle$ в разных базисах:

$$|\psi\rangle = \frac{3}{5}|H\rangle - \frac{4i}{5}|V\rangle = \frac{3-4i}{5\sqrt{2}}|D\rangle + \frac{3+4i}{5\sqrt{2}}|A\rangle = \frac{7}{5\sqrt{2}}|R\rangle - \frac{1}{5\sqrt{2}}|L\rangle. \quad (11)$$

Произвольное квантовое поляризационное состояние фотона задаётся двумя комплексными числами α, β , то есть четырьмя вещественными параметрами. Однако, мы можем, во-первых, применить условие нормировки $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, а во-вторых, не принимать во внимание общий фазовый множитель состояния, так как в подавляющем числе случаев на эксперименте мы измеряем квадрат модуля волновой функции, а не её фазу. Таким образом, для описания состояния можно использовать только два вещественных параметра. В частности, можно параметризовать вектор-столбец через углы $\theta \in [0, \pi]$ и $\phi \in [0, 2\pi]$ на сфере:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

При использовании такой параметризации мы можем сказать, что множеству квантовых состояний $|\psi\rangle$ ставится в соответствие множество точек на некоторой сфере единичного радиуса, носящей в литературе название **сферы Пуанкаре**. При этом положительному направлению оси z сопоставляется направление вектора гильбертова пространства $|H\rangle$, отрицательному – $|V\rangle$ и так далее (см. Рис. 1). Линейной поляризации соответствует сечение сферы плоскостью Oxz , правой круговой поляризации – точка на сфере $(0, 1, 0)$, а левой – точка $(0, -1, 0)$.

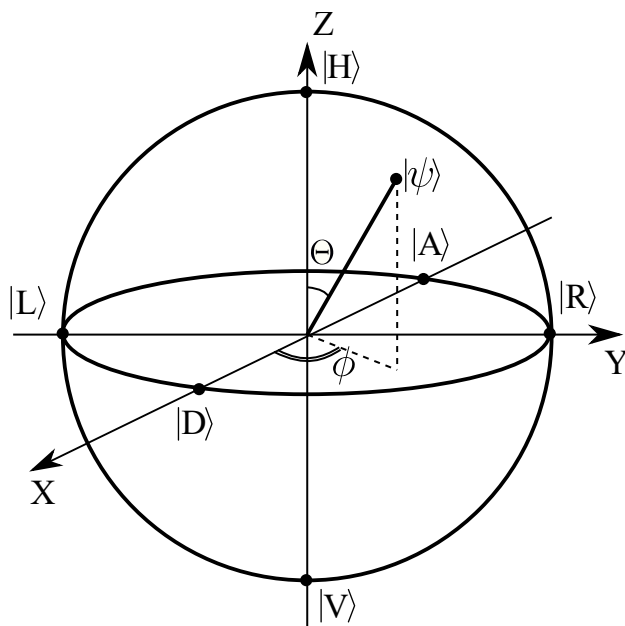


Рис. 1. Сфера Пуанкаре

Описание квантового состояния при помощи сферы Пуанкаре оказывается чрезвычайно удобным из-за наглядности геометрической интерпретации, а также в силу того, что любое унитарное (не изменяющее полную энергию системы) преобразование квантового состояния можно схематически изобразить линиями на поверхности сферы. Очевидно, что если бы мы имели дело с обычной сферой в трёхмерном евклидовом пространстве, то все возможные преобразования

сводятся к поворотам на некоторые углы относительно трёх возможных осей x , y и z . Действуя по аналогии, введём три оператора поворота на сфере Пуанкаре, называемые **операторами Паули**:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Для наглядности подействуем, например, оператором σ_x на некоторые вектора состояния следующим образом:

$$\hat{\sigma}_x |H\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |V\rangle \quad (14)$$

$$\hat{\sigma}_x |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = |L\rangle \quad (15)$$

$$\hat{\sigma}_x |D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |D\rangle \quad (16)$$

Из выражений выше видно, что оператор σ_x повернул вектора $|H\rangle$ и $|R\rangle$ на 180° относительно оси x , а вектор $|D\rangle$, сонаправленный с положительным направлением оси x , при такой операции, очевидно, не изменил своего направления. Повторяя подобные рассуждения для операторов σ_z и σ_y , мы получим, что эти операторы осуществляют вращение вектора состояния на 180° относительно осей z и y соответственно. Таким образом, любое унитарное преобразование \hat{P} поляризованного квантового состояния может быть описано в терминах линейной суперпозиции операторов Паули и единичного оператора:

$$\hat{P} = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{\sigma}_x + a_2 \hat{\sigma}_y + a_3 \hat{\sigma}_z, \quad (17)$$

где a_i – комплексные числа ($i = \{0, 1, 2, 3\}$).

1.3 Матрица плотности. Чистые и смешанные состояния

Рассмотренные выше понятия были сформулированы для одиночных фотонов, описываемых векторами состояния $|\psi\rangle$, называемых также **чистыми состояниями**. Рассмотрим теперь **статистический ансамбль** чистых состояний $\{p_i |\psi_i\rangle\}$, в котором каждое состояние $|\psi_i\rangle$ встречается с вероятностью p_i . Математически подобная ситуация не может быть описана с помощью какого-либо вектора состояния, поэтому для определения смешанного состояния используется **матрица плотности** $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (18)$$

Не следует путать статистическую вероятность p_i с квантовомеханическими вероятностями, введёнными в прошлом разделе! Если система находится в суперпозиции чистых состояний $|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle$, то она находится во всех состояниях суперпозиции одновременно, и с вероятностями $|\alpha|^2$ или $|\beta|^2$ перейдёт при измерении в состояние $|\psi_1\rangle$ или $|\psi_2\rangle$ соответственно. Вероятности же p_i являются чисто классическими – система, находящаяся в смешанном состоянии, не находится во всех чистых состояниях одновременно – она находится в одном конкретном состоянии $|\psi_i\rangle$ с вероятностью p_i . Можно также заметить, что если для амплитуд вероятностей α и β выполнялось условие нормировки вида $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, то для вероятностей p_i условие нормировки, из определения, выглядит иначе : $\sum_i p_i = 1$.

Матрица плотности $\hat{\rho}$ с элементами $\rho_{ij} = \langle i|\hat{\rho}|j\rangle$, где $|i\rangle, |j\rangle$ – вектора состояний, обладает следующими свойствами.

1. Эрмитовость: $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$.
2. Неотрицательная определённость: $\langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle \geq 0$ для любого $|\psi\rangle$.
3. Единичный след: $Tr(\hat{\rho}) = 1$.
4. Среднее от физической наблюдаемой \hat{L} вычисляется по формуле $\bar{L} = Tr(\hat{L}\hat{\rho})$.

Верно также и обратное – если имеется оператор $\hat{\rho}$, обладающий вышеперечисленными свойствами, то найдутся вероятности p_i и состояния $|\psi_i\rangle$ такие, что $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Учитывая всё вышесказанное, мы можем заключить, что статистические свойства ансамбля фотонов полностью определяются его матрицей плотности.

Попробуем в качестве примера построить матрицу плотности одного фотона, находящегося в некотором чистом поляризованном состоянии. Используя общее представление поляризованного состояния (19), можно записать:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2} & \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & 1 - \cos\theta \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s_z & s_x - is_y \\ s_x + is_y & 1 - s_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь для удобства записи использованы вещественные числа s_x, s_y, s_z , называемые параметрами Стокса, и определяемые следующим образом:

$$s_x = \sin\theta \cos\phi, \quad (20)$$

$$s_y = \sin\theta \sin\phi, \quad (21)$$

$$s_z = \cos\theta. \quad (22)$$

Параметры Стокса также, как и углы на сфере Пуанкаре, полностью определяют поляризационное состояние системы. Удобство записи матрицы плотности через эти величины заключается в том, что именно параметры Стокса являются экспериментально измеримыми величинами. Таким образом, можно экспериментально восстановить элементы матрицы плотности, то есть провести *томографию квантового состояния*.

Условие неотрицательной определённости матрицы плотности $\langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle \geq 0$ эквивалентно условию $0 \leq s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 \leq 1$, т.е. матрице плотности ставится в соответствие точка внутри шара, ограниченного сферой Пуанкаре (Рис. 1). Чистым состояниям при этом можно сопоставить точки на сфере Пуанкаре, а смешанным – внутренние точки шара.

1.4 Двухфотонные перепутанные состояния

Оставляя без внимания пространственно-частотные характеристики электромагнитного поля, будем следить только за поляризационными степенями свободы системы, составленной из двух фотонов. Базисными векторами такой составной системы являются состояния $|H\rangle_1|H\rangle_2$, $|V\rangle_1|H\rangle_2$, $|H\rangle_1|V\rangle_2$ и $|V\rangle_1|V\rangle_2$. Здесь нижний индекс обозначает, условно, первый фотон и второй фотон, в дальнейшем мы будем опускать эти индексы для краткости, сохраняя при этом порядок записи векторов состояний: сперва состояние первого фотона, затем второго. Определим, что означает запись $|H\rangle_1|H\rangle_2$. Введём операцию *тензорного произведения* двух векторов $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_H \\ c_V \end{pmatrix}$ и

$|\chi\rangle = \begin{pmatrix} d_H \\ d_V \end{pmatrix}$ по правилу:

$$|\psi\rangle|\chi\rangle \equiv |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle = \begin{pmatrix} c_H \\ c_V \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} d_H \\ d_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_H d_H \\ c_H d_V \\ c_V d_H \\ c_V d_V \end{pmatrix}. \quad (23)$$

При этом, если некоторый оператор \hat{A} действует только на степени свободы 1-го фотона, то в пространстве состояний двухфотонной системы вместо него нужно использовать оператор $\hat{A} \otimes \hat{I}$. Аналогично, если оператор \hat{B} действует только на степени свободы 2-го фотона, то ему сопоставляется оператор $\hat{I} \otimes \hat{B}$. Верным оказывается также и следующее выражение:

$$(\hat{A} \otimes \hat{B})|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle \otimes \hat{B}|\chi\rangle. \quad (24)$$

С точки зрения физики такое описание соответствует невзаимодействующим подсистемам.

Согласно квантово-механическому принципу суперпозиции произвольное чистое двухфотонное поляризационное состояние задаётся вектором

$$|\Psi\rangle = c_1|H\rangle|H\rangle + c_2|H\rangle|V\rangle + c_3|V\rangle|H\rangle + c_4|V\rangle|V\rangle \quad (25)$$

В общем случае (при произвольном значении коэффициентов c_i , отвечающих лишь условию нормировки $\sum_{i=1}^4 |c_i|^2 = 1$) такой вектор состояния **нельзя** записать в факторизованном виде:

$$|\Psi\rangle \neq (c_H|H\rangle + c_V|V\rangle) \otimes (d_H|H\rangle + d_V|V\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle.$$

В этом случае говорят, что состояние $|\Psi\rangle$ является *перепутанным состоянием* двух фотонов. В качестве примера можно привести одно из так называемых состояний Эйнштейна-Подольского-Розена (подробнее о ЭПР-парадоксе и состояниях можно прочитать например в [3]), отвечающее значению коэффициентов $c_1 = c_4 = 0$, $c_2 = c_3 = 1/\sqrt{2}$:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle + |V\rangle|H\rangle) \neq |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle \quad (26)$$

Неперепутанным состоянием двух фотонов будет являться, например, состояние

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|H\rangle|H\rangle + |H\rangle|V\rangle + |V\rangle|H\rangle + |V\rangle|V\rangle) = \left(\frac{|H\rangle + |V\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|H\rangle + |V\rangle}{\sqrt{2}}\right) = |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle. \quad (27)$$

Существует несколько способов приготовления перепутанных двухфотонных состояний. Рассмотрим один из наиболее распространённых методов, который основан на процессе спонтанного параметрического рассеяния на нелинейных кристаллах с квадратичной нелинейностью восприимчивости, называемых также параметрическими кристаллами. В таком процессе каждый фотон накачки (pump) распадается на пару фотонов – их называют сигнальный (signal) и холостой (idler). При этом процесс распада должен происходить так, чтобы одновременно удовлетворялись два закона сохранения – закон сохранения энергии $\omega_p = \omega_s + \omega_i$ и закон сохранения импульса: $\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i$.

Закон сохранения энергии при параметрическом распаде наглядно изображают на схеме энергетических уровней кристалла (см. рис. 2), а закон преобразования импульса обычно показывают на векторной диаграмме (см. рис. 2). Совокупность этих двух законов иначе называют *условиями фазового синхронизма*. На первый взгляд кажется, что пар, удовлетворяющих условиям фазового синхронизма, бесконечно много, однако из-за наличия дисперсии в кристалле это оказывается не совсем верным – при подборе частоты так, чтобы выполнялся закон сохранения энергии, не удастся согласовать импульсы. Таким образом, для трех волн одной поляризации оба условия одновременно не выполняются. Только учёт двойного лучепреломления в кристаллах, то есть зависимости показателя преломления от направления поляризации света по отношению к осям

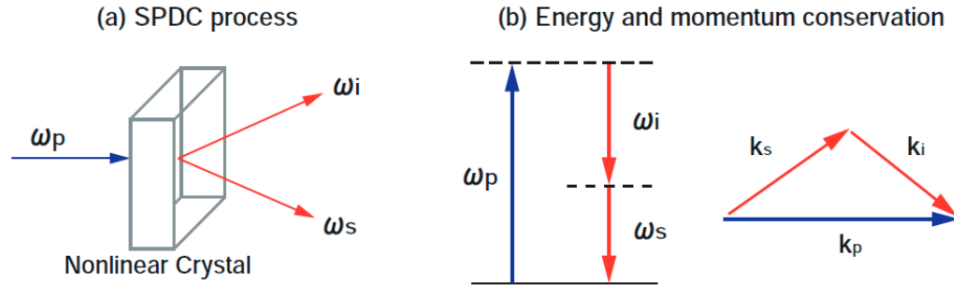


Рис. 2. Схема параметрического преобразования света в нелинейном кристалле.

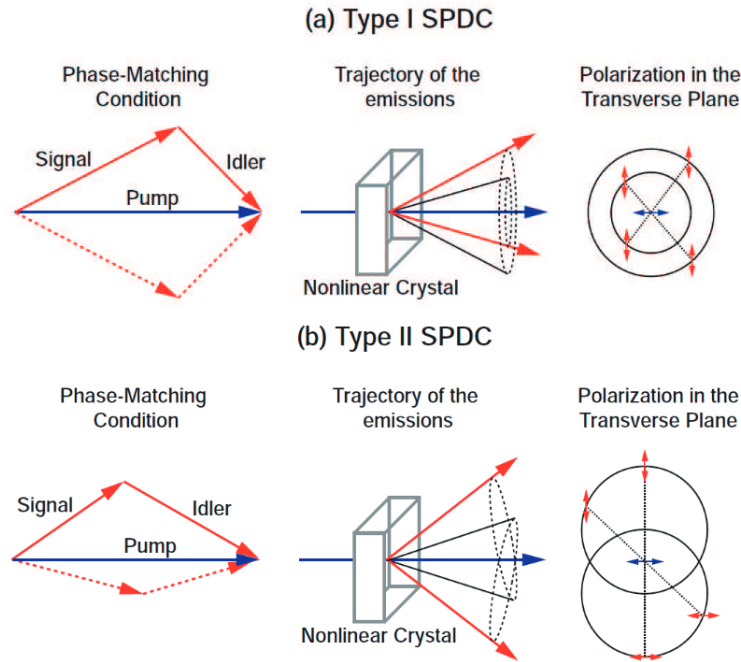


Рис. 3. Фазовый синхронизм I и II типа в нелинейном кристалле.

кристалла, позволяет достичь выполнения условий синхронизма в двух разных конфигурациях (см. рис. 3): синхронизм I-типа (*oee* или *eoo*), когда сигнальный и холостой лучи имеют одинаковую поляризацию, ортогональную поляризации луча накачки, и синхронизм II-типа (*oeo* или *eo**e*), когда сигнальный и холостой лучи имеют ортогональные поляризации.

Нам в дальнейшем будет наиболее интересен случай вырожденного коллинеарного процесса – при равных частотах сигнального и холостого полей $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2$ и сонаправленности всех трёх волновых векторов $\vec{k}_s \parallel \vec{k}_i \parallel \vec{k}_p$.

В рассматриваемой экспериментальной установке используются два параметрических кристалла, обеспечивающих фазовый синхронизм типа I и вырожденный коллинеарный процесс. Подробнее генерируемое перепутанное состояние мы опишем ниже в разделе 2.1.

1.5 Измерения и наблюдаемые

Раздел квантовых измерений традиционно в недостаточной мере излагается в стандартных курсах квантовой механики. Отчасти это связано с тем, что в середине XX века возможности эксперимента не позволяли работать с одиночными квантовыми системами, опыты проводились с макроскопическими ансамблями, где главное значение имеют средние значения, а не результаты отдельных наблюдений. Тем не менее в связи с продолжающейся миниатюризацией в микро- и нанoeлектронике, развитием техники низких температур, созданием высокочастотных резонаторов для электромагнитного поля открылись новые возможности для манипулирования и проведения измерений состояний отдельных квантовых систем. Квантовые поляризационные состояния фотонов начали использовать одними из первых, что позволило продемонстрировать с их помощью ряд интересных квантовых эффектов.

В этом разделе мы рассмотрим несколько примеров проведения измерений в различных измерительных базисах, а также опишем измерения с точки зрения матричного формализма квантовой механики.

1.5.1 Поляроид

Если на пути фотона поставить идеальный фотодетектор, то он его зарегистрирует с вероятностью 1 ("щелчок"). Если же фотона нет, щелчка не будет (рис. 4).



Рис. 4. Фотон поглощается идеальным детектором

Проведем аналогичный опыт, но на пути фотона поставим *поляроид*. Для классической электромагнитной волны поляроид, ориентированный вдоль некоторого направления, на выходе выдает компоненту волны с поляризацией вдоль этого направления, а перпендикулярную компоненту поглощает.

Опыт показывает, что одиночный фотон (в определённом состоянии $|\psi\rangle$) может как пройти через поляроид и вызвать щелчок детектора, так и поглотиться в поляроиде и не быть зафиксированным детектором. Причём заранее невозможно предсказать, какой вариант реализуется. Результат носит принципиально вероятностный характер (рис. 5).

Единственными случаями, когда результат можно предсказать, являются случаи линейной поляризации вдоль и поперёк оси поляроида: в первом случае фотон детектируется с вероятностью 1, во втором — не детектируется.

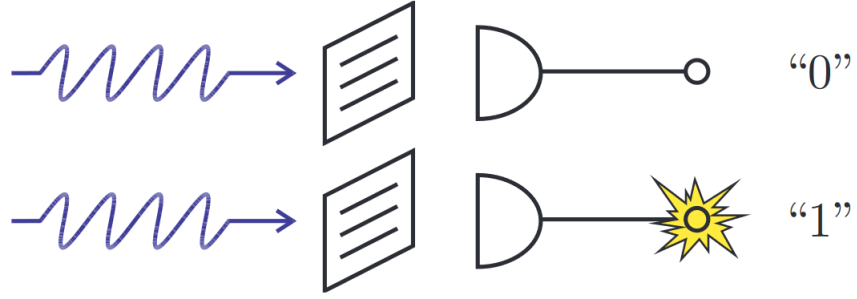


Рис. 5. Вероятностный характер срабатывания детектора для фиксированного состояния фотона

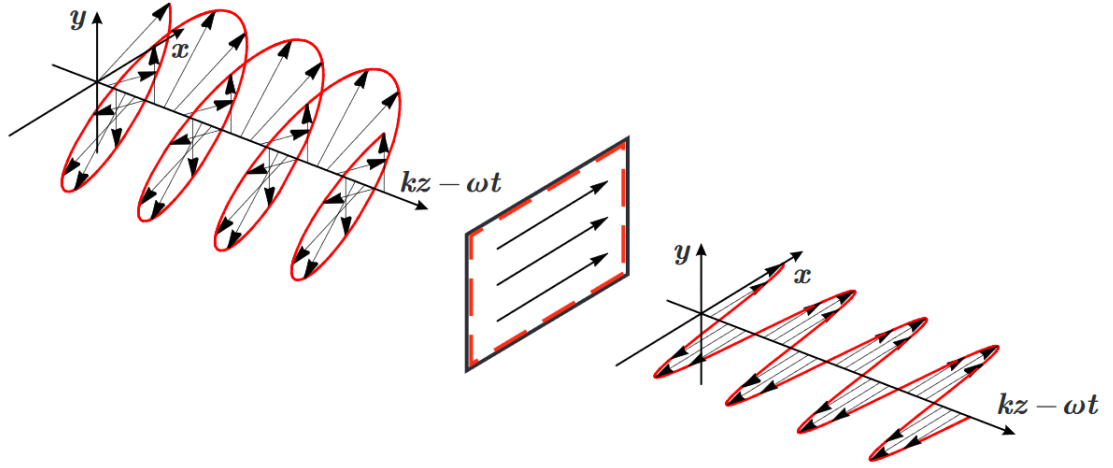


Рис. 6. Действие поляроида, ориентированного в горизонтальном направлении. Фотон либо поглощается поляроидом, либо проходит через него с горизонтальной поляризацией

стью 1, во втором с вероятностью 0. Дело в том, что поляроид проецирует состояния и может выдавать на выходе фотоны только с поляризацией вдоль этого направления. Например, если поляроид ориентирован горизонтально, то на выходе из него все пролетающие фотоны находятся в состоянии $|H\rangle$ (рис. 6). Действие такого поляроида задаётся проектором

$$\hat{P} = |H\rangle\langle H| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Подействуем этим проектором на произвольное состояние фотона $|\psi\rangle = c_1|H\rangle + c_2|V\rangle$:

$$\hat{P}|\psi\rangle = |H\rangle\langle H|\psi\rangle = c_1|H\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Мы видим, что норма вектора $\hat{P}|\psi\rangle$ равна $|c_1|^2 \leq 1$. Это указывает на поглощение фотона поляроидом. Действительно, опыт показывает, что вероятность зафиксировать фотон детектором в точности равна $|c_1|^2$. С другой стороны, эта вероятность есть не что иное, как $|\langle H|\psi\rangle|^2$. Вероятность поглощения равна $1 - |c_1|^2 = |c_2|^2 = |\langle V|\psi\rangle|^2$.

Для прояснения связи физики и математики вспомним математическую задачу поиска собственных векторов и собственных значений матрицы. Для заданной матрицы A требуется найти числа λ и ненулевые векторы $|f\rangle$ такие, что

$$A|f\rangle = \lambda|f\rangle. \quad (30)$$

Поиск собственных значений заключается в решении уравнения $\det(A - \lambda I) = 0$, а затем решения системы уравнений $(A - \lambda I)|f\rangle = 0$.

Матрица P эрмитова (см. выражение (28)), её собственные значения равны 1 и 0, соответствующие им собственные векторы – это векторы $|H\rangle$ и $|V\rangle$. Это можно интерпретировать следующим образом. Физической наблюдаемой "прохождение фотона" приписаны два значения: значение "1", если фотон задетектирован приёмником, и значение "0", если фотон не задетектирован. В единичном акте измерения с одним налетающим фотоном мы получаем одно значение: либо значение "1", либо значение "0". Вероятность исхода "1" равна $|\langle H|\psi\rangle|^2$, то есть квадрату модуля скалярного произведения вектора состояния фотона $|\psi\rangle$ и собственного вектора оператора \hat{P} , отвечающего собственному значению 1. Аналогично, вероятность исхода "0" равна $|\langle V|\psi\rangle|^2$, т.е. квадрату модуля скалярного произведения вектора состояния фотона $|\psi\rangle$ и собственного вектора оператора \hat{P} , отвечающего собственному значению 0. Среднее значение физической наблюдаемой "прохождение фотона" есть математическое ожидание:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot (\text{вероятность исхода "1"}) + 0 \cdot (\text{вероятность исхода "0"}) = \\ & = 1 \cdot |c_1|^2 + 0 \cdot |c_2|^2 = \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \langle \psi | \hat{P} | \psi \rangle \equiv \langle P \rangle. \end{aligned} \quad (31)$$

Запись $\langle P \rangle$ означает среднее значение наблюдаемой, где усреднение ведётся по результатам измерений для фиксированного состояния фотона $|\psi\rangle$ (много фотонов, каждый из которых находится в состоянии $|\psi\rangle$, пропускаем через поляризатор и смотрим, щёлкнул ли детектор). Такие средние называют средними по состоянию $|\psi\rangle$, что и подразумевает запись $\langle P \rangle = \langle \psi | P | \psi \rangle$. Саму измеряемую величину "прохождение фотона" тоже можно обозначить буквой $P_{\text{физ.вел.}} = \{1, 0\}$, которая может принимать два значения.

1.5.2 Двухлучепреломляющий кристалл

Рассмотрим более интересный случай измерения с двухлучепреломляющим кристаллом (рис. 7). Для описания взаимодействия излучения с кристаллом мы будем использовать терминологию s - и p -поляризованных волн. Так, s -поляризованная волна (нем. senkrecht — перпендикулярный) имеет вектор электрического поля \vec{E} , перпендикулярный плоскости падения излучения на

кристалл. s -поляризованную волну также называют σ -поляризованной, сагиттально поляризованной, волной E -типа, ТЕ-волной (Transverse Electric). p -поляризованная волна (лат. parallel — параллельный) имеет вектор электрического поля \vec{E} , параллельный плоскости падения. p -поляризованную волну также называют π -поляризованной, поляризованной в плоскости падения, волной H -типа, ТМ-волной (Transverse Magnetic). При попадании волны на двулучепреломляющий кристалл s -компонента излучения не отклоняется, а p -компонента отклоняется от первоначального направления распространения луча (пунктирными линиями на рисунке показаны фронты элементарных волн). Здесь мы считаем, что в выбранной лабораторной системе координат s -компоненте соответствует горизонтальная поляризация, а p -компоненте – вертикальная поляризация. Используя два детектора, в каждом единичном акте мы будем наблюдать экспериментально срабатывание лишь одного из детекторов. Можно считать, что до попадания в детектор фотон находится в обоих лучах одновременно: и в верхнем, и в нижнем (принцип суперпозиции состояний). Однако, будучи частицей, фотон может быть зарегистрирован только в одном детекторе - либо в верхнем, либо в нижнем, то есть происходит коллапс состояния.

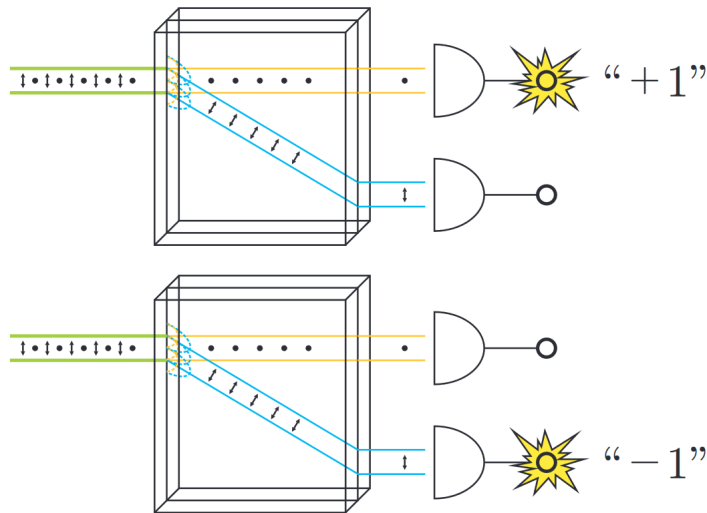


Рис. 7. Схема измерения параметра Стокса s_z

Срабатыванию верхнего детектора припишем значение "+1", а срабатыванию нижнего – "1". Обозначим \hat{Z} наблюдаемую, измерение которой дает с вероятностями $|c_1|^2$ и $|c_2|^2$ результат +1 и –1, соответственно, тогда для состояния $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ получим:

$$\langle \hat{Z} \rangle = (+1) \cdot |c_1|^2 + (-1) \cdot |c_2|^2 = \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \langle \psi | \sigma_z | \psi \rangle, \quad (32)$$

где σ_z – матрица Паули, определённая выражением (20). Видно, что собственные значения σ_z – числа +1 и –1, а отвечающие им собственные векторы – $|H\rangle$ и $|V\rangle$. Подставим в выражение

(32) вектор $|\psi\rangle$ в параметризации (12) с использованием двух углов на сфере Пуанкаре:

$$\langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2} & \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2} \end{pmatrix} = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta = s_z \quad (33)$$

Таким образом, среднее значение величины \hat{Z} совпадает с параметром Стокса s_z , то есть именно этот параметр и измеряется экспериментально в предложенной схеме. Используя выражение (32), можно сказать, что для измерения мы должны суммировать количество срабатываний верхнего (N_+) и нижнего (N_-) детекторов и вычислять отношение $(N_+ - N_-)/(N_+ + N_-)$ при многократном отправлении на двулучепреломляющий кристалл идентичных фотонов в состоянии $|\psi\rangle$. Знаменатель ($N_+ + N_-$) есть ничто иное, как нормировка параметра Стокса на суммарное число отсчётов.

1.5.3 Поворот плоскости поляризации

Видоизменим эксперимент, поставив перед двулучепреломляющим кристаллом вращатель Фарадея, в котором вследствие продольного магнитооптического эффекта Фарадея плоскость поляризации можно повернуть на угол -45° (рис. 8). Такой поворот плоскости поляризации отвечает

обычному повороту плоскости Oxy и задаётся унитарной матрицей $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle = U|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 - c_1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

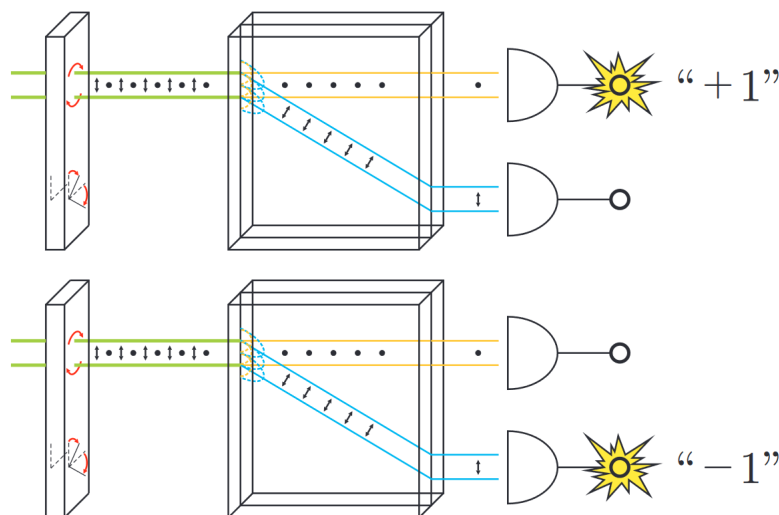


Рис. 8. Схема измерения параметра Стокса s_x

Введём новую наблюдаемую \hat{X} , среднее значение которой равно

$$\langle X \rangle = \frac{1}{2}|c_1 + c_2|^2 - \frac{1}{2}|c_2 - c_1|^2 = \langle\phi|\sigma_x|\phi\rangle = \langle\psi|U^\dagger\sigma_xU|\psi\rangle \quad (35)$$

Заметим что $U^\dagger \sigma_z U = \sigma_x$, тогда среднее значение величины \hat{X} можно записать как $\langle \hat{X} \rangle = \langle \psi | \sigma_x | \psi \rangle$. Собственными векторами матрицы σ_x являются вектора диагональной $|D\rangle$ и антидиагональной $|A\rangle$ поляризаций, а собственными числами – ± 1 соответственно. Из схемы эксперимента видно, что если бы фотон изначально находился в состоянии $|D\rangle$, то при повороте плоскости поляризации на -45° он бы превратился в фотон с горизонтальной поляризацией $|H\rangle$ и с определённой пошёл бы в верхний детектор, и мы бы с определённой получили значение "+1". Если бы фотон изначально находился в состоянии $|A\rangle$, то при повороте плоскости поляризации на -45° он бы превратился в фотон в состоянии $|V\rangle$ и с определённой пошёл бы в нижний детектор, чему соответствует значение "-1". Действуя аналогично предыдущему разделу, можно показать, что $\langle \psi | \sigma_x | \psi \rangle = \sin \theta \cos \phi = s_x$, то есть предложенная выше схема является способом экспериментального измерения параметра Стокса s_x – нам следует так же поделить разность количества отчётов на верхнем и нижнем детекторах на их сумму: $(N_+ - N_-)/(N_+ + N_-)$.

Этот пример ещё раз показывает, что каждой измеряемой величине можно поставить в соответствие матрицу, собственные векторы которой определяют такие состояния, для которых исходы измерения принимают *определённое значение*.

1.5.4 Сдвиг фаз

Рассмотрим, наконец, случай, когда перед двулучепреломляющим кристаллом и вращателем Фарадея установлена фазовая пластинка $\lambda/4$, которая создаёт между горизонтальной и вертикальной компонентами поляризации разность фаз $\pi/2$ (из-за разных скоростей распространения волн, поляризованных горизонтально и вертикально).

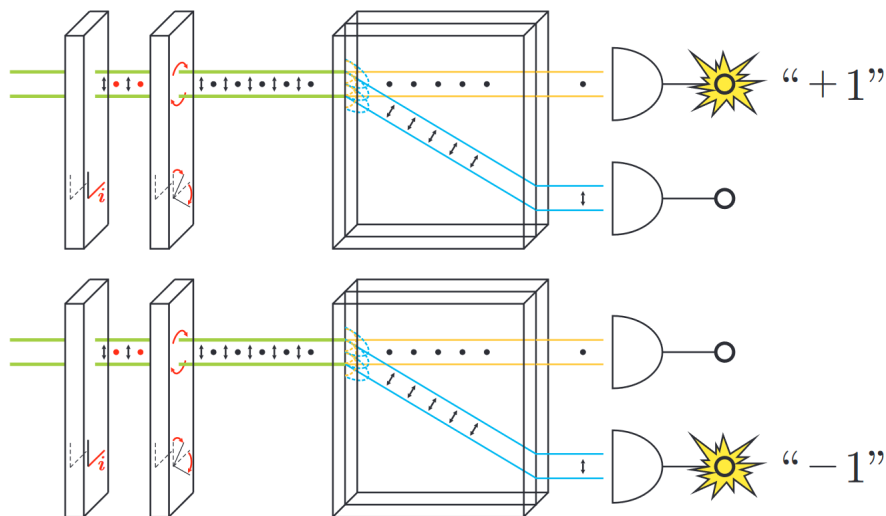


Рис. 9. Схема измерения параметра Стокса s_y

Действие такой пластинки задаётся унитарной матрицей:

$$W = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle \rightarrow |\chi\rangle = W|\psi\rangle = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Введём новую наблюдаемую \hat{Y} , среднее значение которой равно

$$\langle \hat{Y} \rangle = \langle \chi | \sigma_x | \chi \rangle = \langle \psi | W^\dagger \sigma_x W | \psi \rangle = \langle \psi | \sigma_y | \psi \rangle \quad (37)$$

Здесь мы опять используем параметризацию (12) для того чтобы записать $\langle \psi | \sigma_y | \psi \rangle = s_y$. Собственными векторами матрицы σ_y являются вектора круговой правой $|R\rangle$ и левой $|L\rangle$ поляризации, а собственными числами – ± 1 соответственно. Из схемы эксперимента видно, что если бы фотон изначально находился в состоянии $|R\rangle$, то после сдвига фаз он бы превратился в фотон с диагональной поляризацией $|D\rangle$ и итоге с определённой вероятностью попал бы в верхний детектор, и мы бы с определённой вероятностью получили значение "+1". Если бы фотон изначально находился в состоянии $|L\rangle$, то после сдвига фаз он бы превратился в фотон в состоянии $|A\rangle$ и с определённой вероятностью попал бы в нижний детектор, чему соответствует значение "-1". (рис. 9)

1.6 Томография квантового состояния кубита

Как мы уже отмечали ранее, произвольное чистое состояние поляризационного кубита определяется волновой функцией

$$|\psi\rangle = c_H |H\rangle + c_V |V\rangle, \quad (38)$$

где $|H\rangle$ и $|V\rangle$ – волновые функции горизонтально и вертикально поляризованного фотона, соответственно; а c_H и c_V – комплексные амплитуды вероятности, такие что $|c_H|^2 + |c_V|^2 = 1$. Волновая функция определена с точностью до общего фазового множителя, поэтому мы можем положить c_H вещественным и параметризовать волновую функцию кубита с помощью двух углов (зенитного θ и азимутального ϕ) в сферической системе координат. Таким образом каждому состоянию кубита будет соответствовать точка на сфере Пуанкаре.

При однократном измерении наблюдаемой $\hat{Z} = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|$ мы получим либо значение +1, соответствующее проекции $|\psi\rangle$ на $|H\rangle$, с вероятностью $|c_H|^2$, либо значение -1, которое соответствует проекции $|\psi\rangle$ на $|V\rangle$, с вероятностью $|c_V|^2$. Чтобы узнать зенитный угол θ необходимо многократно измерить наблюдаемую \hat{Z} и определить ее среднее значение $\langle \hat{Z} \rangle = \langle \psi | \hat{Z} | \psi \rangle = |c_H|^2 - |c_V|^2 = \cos \theta = s_z$. Для однозначного определения квантового состояния кубита нужно определить три его параметра Стокса, а следовательно, измерить его проекции на разные пары ортогональных квантовых состояний, неортогональные друг другу

($\{|H\rangle, |V\rangle\}$, $\{|D\rangle, |A\rangle\}$, $\{|R\rangle, |L\rangle\}$). Кроме среднего значения наблюдаемой \hat{Z} мы будем измерять средние значения наблюдаемых $\langle\hat{X}\rangle = \langle|D\rangle\langle D| + |A\rangle\langle A| = s_x$ и $\langle\hat{Y}\rangle = \langle|R\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L| = s_y$. Таким образом, мы сможем однозначно определить координаты точки на сфере Пуанкаре, отвечающей измеряемому кубиту.

В реальном эксперименте точка с измеренными таким образом координатами $\{\langle\hat{X}\rangle_m, \langle\hat{Y}\rangle_m, \langle\hat{Z}\rangle_m\}$, где индекс m нумерует полученные в эксперименте значения, никогда не будет точно лежать на сфере Пуанкаре. Иными словами, система уравнений

$$\langle\psi(\theta, \phi)|\hat{X}|\psi(\theta, \phi)\rangle = \langle\hat{X}\rangle_m, \quad (39)$$

$$\langle\psi(\theta, \phi)|\hat{Y}|\psi(\theta, \phi)\rangle = \langle\hat{Y}\rangle_m, \quad (40)$$

$$\langle\psi(\theta, \phi)|\hat{Z}|\psi(\theta, \phi)\rangle = \langle\hat{Z}\rangle_m, \quad (41)$$

окажется несовместной. Это связано с тем, что приготовленное состояние не обязательно является чистым, к тому же все параметры Стокса определяются с погрешностью. Поэтому необходимо проверять, чему равна длина вектора на сфере Пуанкаре, и если она отличается 1, то делить все наблюдаемые s_x, s_y, s_z на длину вектора $\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}$.

Недостаточный объем выборки может привести к искажению не только значений отдельных компонент вектора на сфере Пуанкаре, но и его длины. Проблема в том, что в случае изменения длины вектора мы не можем точно сказать, является ли это следствием того, что изучаемое квантовое состояние является смешанным, или же погрешности измерений вносят заметный вклад, но состояние является чистым. Для того, чтобы определить, адекватна ли модель чистого состояния экспериментальным данным, можно рассчитать длину вектора Стокса и ее статистическую погрешность. Если в пределах погрешности длина вектора Стокса может быть равна единице, то значит модель чистого состояния адекватна.

Для оценки качества приготовленного состояния используется величина **Fidelity** (верность), определяемая по формуле

$$F(\rho_{prep}, \rho_{meas}) = \left(\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_{prep}} \rho_{meas} \sqrt{\rho_{prep}}} \right)^2. \quad (42)$$

Здесь ρ_{meas} – это матрица плотности, восстановленная после измерений параметров Стокса, ρ_{prep} – матрица плотности идеального состояния, которое мы ожидали обнаружить. При вычислении этой величины следует помнить, что корень из матрицы - это не корень из всех ее элементов!

Также для сравнения двух матриц целесообразно сравнивать их собственные вектора, соответствующие им собственные значения, а также их чистоту $p = \text{Tr}\rho^2$.

1.7 Томография однокубитного квантового процесса

В этой части мы исследуем некоторый неизвестный нам квантовый процесс (“черный ящик”), выполняющий некоторое преобразование над входными квантовыми состояниями – в нашем случае единичным поляризационным кубитом. В простейшем случае этот процесс оставляет чистое состояние чистым, и тогда его можно описать с помощью унитарного оператора \hat{E} , который можно записать в матричной форме в виде матрицы 2×2 , то есть

$$\hat{E}|\phi_{in}\rangle = |\phi_{out}\rangle. \quad (43)$$

А с учетом того, что матрица квантового процесса унитарна мы можем параметризовать ее как

$$E = \begin{pmatrix} E_1 e^{i\phi_1} & E_2 e^{i\phi_2} \\ E_2 e^{i(\pi-\phi_2)} & E_1 e^{-i\phi_1} \end{pmatrix}. \quad (44)$$

В случае, если входное состояние смешанное, то его матрица плотности под действием того же процесса будет изменяться как:

$$\hat{\rho}_{out} = \hat{E}\hat{\rho}_{in}\hat{E}^\dagger. \quad (45)$$

В общем же случае, под действием некоторого процесса чистое состояние может превращаться в смешанное. Поскольку матрица плотности смешанного состояния представляет собой статистическую смесь матриц плотности чистых состояний, то для описание процесса нам требуется уже не один оператор, а несколько. Однако матрица плотности нового, изменённого состояния, должна удовлетворять требованиям, изложенным в разделе 1.3. Можно строго доказать, что тогда для корректного описания процесса нам достаточно набора из d^2 операторов (где d – размерность матрица плотности), которые называются операторами Крауса $\{\hat{E}_k\}$:

$$\rho_{out} = \sum_{k=1}^4 \hat{E}_k \rho_{in} \hat{E}_k^\dagger. \quad (46)$$

Для дальнейшего описания введем операции, преобразующие матрицы в столбцы и строки. Пусть операция $\text{Col}(M)$ преобразует матрицу в столбец по следующему правилу:

$$\text{Col} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix}, \quad (47)$$

т. е. второй столбец ставится под первым и т. д. Аналогичным образом введем операцию Row , преобразующую матрицу в строку, причем вторая строка матрицы ставится справа от первой

и т. д.:

$$\text{Row} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a \ b \ c \ d). \quad (48)$$

Введем также обратные операции Col^{-1} и Row^{-1} , преобразующие столбцы и строки обратно в матрицы.

Тогда мы можем из операторов Крауса составить единую матрицу, описывающую квантовый процесс. Она называется хи-матрицей и имеет следующий вид:

$$\chi = \sum_{k=1}^4 \text{Col}(E_k) \times \text{Col}(E_k)^\dagger. \quad (49)$$

Тогда можно показать, что выражение (46) эквивалентно выражению:

$$\rho_{out} = \sum_{i,j=1}^4 \chi_{ij} A_i \rho_{in} A_j^\dagger, \quad (50)$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, любой квантовый процесс может быть описан с помощью хи-матрицы.

Зная хи-матрицу, можно найти и операторы Крауса. Для этого нужно найти ее собственные вектора, умножить их на корни из соответствующих собственных значений и преобразовать полученные столбцы в матрицы операцией Col^{-1} .

1.7.1 Процедура томографии процесса

Как и в случае с квантовым состоянием, параметры, описывающие квантовый процесс, нельзя определить по одному измерению. Для томографии квантового процесса необходимо подавать на вход различные состояния $\hat{\rho}_i$ и проводить полный набор измерений над выходными состояниями, аналогично тому, как это делалось в случае томографии квантовых состояний.

Поскольку мы будем иметь дело с однокубитным процессом, который описывается хи-матрицей 4×4 , то нам необходимо подавать на вход 4 различных входных состояния, например $\hat{\rho}_1 \approx |H\rangle\langle H|$, $\hat{\rho}_2 \approx |V\rangle\langle V|$, $\hat{\rho}_3 \approx |D\rangle\langle D|$ и $\hat{\rho}_4 \approx |R\rangle\langle R|$, и проводить 4 измерения над каждым из них, например измерять параметры Стокса (четвёртым параметром Стокса мы будем считать интенсивности падающего излучения: $s_0 = \langle |H\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V| \rangle$). Знак приближённого равенства в выражениях выше стоит для того, чтобы отразить тот факт, что в реальном эксперименте мы никогда не сможем приготовить идеальное состояние.

В результате мы получим матрицу измеренных данных, каждый элемент которой M_{ij} — это результат измерения j -го параметра Стокса на выходе квантового процесса, при условии, что на входе было состояние ρ_i . В рамках данной лабораторной работы мы будем ограничиваться

случае, когда изначальное чистое состояние системы остаётся чистым, то есть квантовый процесс описывается одним оператором Крауса E . Тогда матричные элементы M_{ij} можно записать следующим образом:

$$M_{ij} = \text{Tr} \left[\hat{E} \hat{\rho}_i \hat{E}^\dagger s_j \right], \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 0, x, y, z. \quad (51)$$

Поймем теперь как из измеренных данных восстановить характеристики самого процесса, т.е. восстановить операторы Крауса. Можно показать, что выражение (47) эквивалентно выражению:

$$\text{Col}(M) = B \text{Col}(\chi), \quad (52)$$

где B — это матрица 16×16 следующего вида:

$$B = \begin{pmatrix} \text{Row} [\rho_1^* \otimes I] \\ \text{Row} [\rho_2^* \otimes I] \\ \vdots \\ \text{Row} [\rho_1^* \otimes \sigma_x] \\ \vdots \\ \text{Row} [\rho_1^* \otimes \sigma_y] \\ \vdots \\ \text{Row} [\rho_4^* \otimes \sigma_z] \end{pmatrix}, \quad (53)$$

то есть она составлена из тензорных произведений *комплексно сопряженных* матриц плотности входных состояний и матриц Паули, которые вытягиваются в строки и располагаются одна под другой. По сути, матрица B определяет *протокол измерений*, т. е. совокупность всех входных состояний и всех измерений, производимых над выходными состояниями. В частности, для нашего протокола, при условии, что входные состояния $|H\rangle$, $|V\rangle$, $|D\rangle$ и $|R\rangle$ приготавливаются идеально, матрица протокола принимает вид:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i & 0 & 0 & 1 & 0 & i & -i & 0 & 1 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & i & 0 & 0 & -1 & 0 & -i & -i & 0 & 1 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & i & 1 & 0 & i & 0 & 0 & -i & 0 & 1 & -i & 0 & 1 \\ 0 & -2i & 0 & 0 & 2i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2i & 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & -i & 0 & -i & i & 0 & i & 0 & 0 & -i & 0 & -i & i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 & 1 & i & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -i & 1 & 0 & i \end{pmatrix} \quad (54)$$

Тогда, зная матрицу B , можно найти ее обратную матрицу B^{-1} , и найти столбец, отвечающий хи-матрице:

$$\text{Col}(\chi) = B^{-1} \text{Col}(M). \quad (55)$$

Далее, пользуясь операцией Col^{-1} можно найти саму хи-матрицу, найти ее собственные вектора и собственные значения, и, применив к собственным векторам еще раз операцию Col^{-1} и умножив их на соответствующие собственные значения, найти операторы Крауса.

2 Методика проведения эксперимента

2.1 Описание экспериментальной установки. Постановка эксперимента

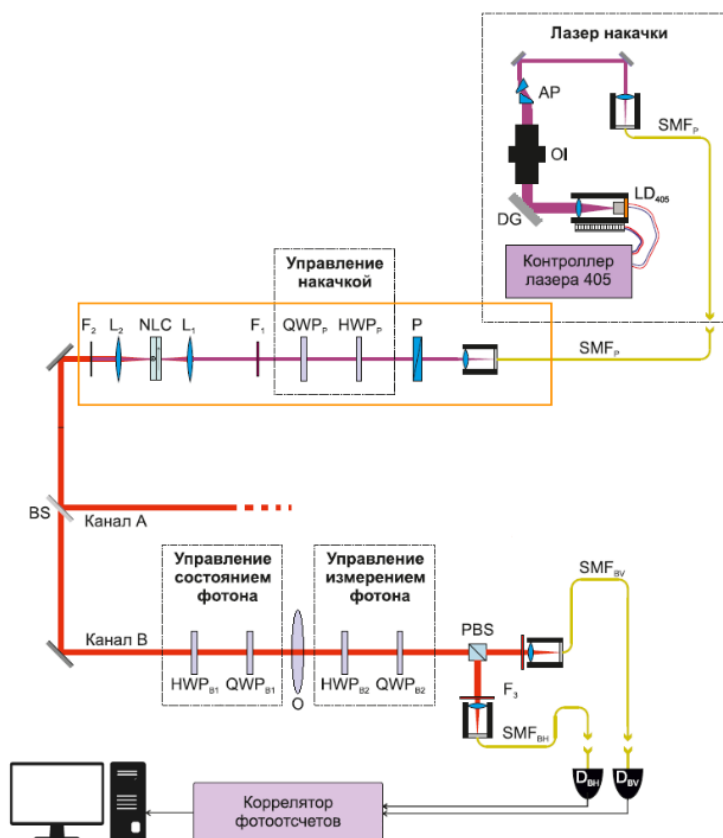


Рис. 10. Схема установки для томографии однокубитного квантового процесса.

Оптическая схема установки представлена на (Рис. 10). Источником накачки для процесса спонтанного параметрического рассеяния служит лазерный диод LD_{405} , излучающий на длине волны 405нм. Ток и температура диода стабилизируются контроллером. Лазерное излучение коллимируется линзой и направляется на дифракционную решетку, установленную таким образом, чтобы максимум первого порядка отражался обратно в лазер. За счет этого образуется внешний резонатор с более высокой селективностью, что позволяет существенно сузить спектр излучения. Максимум нулевого порядка отражается от решетки и попадает в оптический изолятор OI , который предохраняет лазерный диод от обратной засветки, и на пару анаморфных призм, преобразующих эллиптическое сечение пучка в круглое. Затем с помощью коллиматора излучение накачки заводится в оптическое волокно SMF_p . Все используемые оптические волокна являются одномодовыми и сохраняют поляризацию.

Для генерации перепутанной пары фотонов излучение лазера накачки выводится из волокна SMF_p , коллимируется, пропускается последовательно через поляризатор P , пару фазовых пластин (четвертьволновую QWP_p , и полуволновую HWP_p , ориентированных под углами ϕ_p и θ_p к вертикали, соответственно), задающих поляризационное состояние накачки, узкополосный фильтр F_1 , пропускающий линию излучения лазера, и после этого фокусируется линзой L_1 на сборке NLC из двух нелинейных кристаллов ВiBO толщиной 0,5мм. Кристаллы вырезаны под углом коллинеарного вырожденного синхронизма I типа, их оси повернуты так, чтобы в первом кристалле под действием вертикально поляризованной накачки рождались пары фотонов с горизонтальной плоскостью поляризации $|H\rangle|H\rangle$, а во втором – наоборот, под действием горизонтально поляризованной накачки – пары вертикально поляризованных фотонов $|V\rangle|V\rangle$. В общем же случае квантовое состояние света на выходе имеет вид $c_{HH}|H\rangle|H\rangle + c_{VV}|V\rangle|V\rangle$, для которого отношение модулей амплитуд $|c_{HH}|/|c_{VV}|$ определяется углом θ_p , а разность фаз $Arg(c_{HH}) - Arg(c_{VV})$ – углом ϕ_p .

Рожденное в кристаллах NLC излучение коллимируется линзой L_2 , а излучение накачки поглощается фильтром F_2 . Затем излучение разделяется светоделителем BS (нечувствительным к поляризации) на два канала «А» и «В». Необходимо отметить, что при этом с вероятностью 1/2 фотоны не разделятся и уйдут в один канал, однако эти события не детектируются схемой совпадений, присутствующей далее. В каждом канале установлено по паре фазовых пластин (четвертьволновые $QWPA_1$, $QWPB_1$, и полуволновые $HWPA_1$, $HWPB_1$, установленные под углами ϕ_{A1} , ϕ_{B1} , θ_{A1} и θ_{B1} соответственно), которые вместе с пластинами, управляющими накачкой (QWP_p , HWP_p) позволяют приготовить произвольное чистое поляризационное состояние вида $c_{HH}|H\rangle_A|H\rangle_B + c_{HV}|H\rangle_A|V\rangle_B + c_{VH}|V\rangle_A|H\rangle_B + c_{VV}|V\rangle_A|V\rangle_B$. Затем в каждом канале установлено по еще одной паре пластин (четвертьволновые $QWPA_2$, $QWPB_2$, и полуволновые $HWPA_2$, $HWPB_2$, установленные под углами ϕ_{A2} , ϕ_{B2} , θ_{A2} и θ_{B2} соответственно) и поляризационные светоделители PBS , пропускающие вертикально поляризованные фотоны, и отражающие горизонтально поляризованные. Углы поворота фазовых пластин определяют измерительный базис, то есть вид операторов измерения $A(\theta_{A2}, \phi_{A2}) \equiv |\psi\rangle_A\langle\psi|_A + |\psi_\perp\rangle_A\langle\psi_\perp|_A$ и $B(\theta_{B2}, \phi_{B2}) \equiv |\psi\rangle_B\langle\psi|_B - |\psi_\perp\rangle_B\langle\psi_\perp|_B$ в каждом канале. В каждом выходном канале светоделителей излучение фокусируется в волокна SMF_{AH} , SMF_{AV} , SMF_{BH} и SMF_{BV} , соединенные с однофотонными детекторами D_{AH} , D_{AV} , D_{BH} , и D_{BV} . Перед входом в каждое волокно установлены узкополосные фильтры F_3 , пропускающие сгенерированные пары фотонов, а также тепловые и когерентные состояния света на длине волны 810нм, и отсекающие засветку. Все детекторы подключаются к коррелятору, который позволяет регистрировать количество фото-

отсчетов в каждом канале и количество совпадений между любой парой каналов. Результат отправляется на компьютер.

В этом эксперименте углы фазовых пластин HWP_p и QWP_p , управляющих накачкой, выставляются так, чтобы происходила генерация пары фотонов в состоянии $|H\rangle|H\rangle$. А после прохождения светоделителя BS мы будем иметь по одному фотону в каждом из каналов $|H\rangle_A|H\rangle_B$. За фотонами в канале А мы не следим, а канал В используется для томографии.

В случае томографии квантового состояния, приготовление квантового состояния осуществляется с помощью углов поворота фазовых пластин HWP_{B1} и QWP_{B1} . А то, какую из наблюдаемых величин $\langle \hat{X} \rangle$, $\langle \hat{Y} \rangle$ или $\langle \hat{Z} \rangle$ мы будем измерять (иными словами измерительный базис) задается при помощи углов поворота фазовых пластин HWP_{B2} и QWP_{B2} .

При томографии неизвестного квантового процесса между фазовыми пластинами QWP_{B1} и HWP_{B2} мы устанавливаем поляризационный элемент O , реализующий этот процесс. В качестве него могут выступать полуволновая или четвертьволновая пластинка, установленная под некоторым углом, или ромб Френеля. Входные состояния для томографии приготавливаются с помощью фазовых пластин HWP_{B1} и QWP_{B1} , а измерительный базис задается углами поворота фазовых пластин HWP_{B2} и QWP_{B2} .

Виртуальный эксперимент

Если у вас остаются вопросы после прочтения предыдущих разделов или вы просто хотите знать больше об используемых на практике оптических устройствах – будем рады вас видеть на странице виртуального эксперимента, где можно как найти более подробную информацию по экспериментам и технической базе квантовой оптики, так и поставить сам эксперимент!



3 Техника безопасности при работе с приборами

При работе с экспериментальным оборудованием следует неукоснительно следовать следующим рекомендациям:

1. Не допускать попадания сильного светового излучения в глаза, так как это может привести к потере зрения.
2. Осторожно обращаться с оптическими элементами, не прикасаться к оптическим поверхностям руками без перчаток.
3. При случайном загрязнении оптических поверхностей не протирать их самостоятельно, так как это приводит к возникновению микроцарапин и выводит оптику из строя.
4. Осторожно обращаться с соединительными проводами, не совершать резких движений при их перемещении.
5. Не затягивать сильно стопорные винты на различных креплениях и держателях.
6. При работе с нелинейным кристаллом не подносить лицо близко к кристаллу во избежание попадания влаги на кристалл.
7. Включать детекторы одиночных фотонов **только при выключенном освещении!**
8. Не допускать значительных изгибов оптоволоконных линий по острыми углами.

4 Порядок выполнения лабораторной работы

4.1 Алгоритм включения и юстировки

Во избежание произведения действий, фатальных для установки или своих коллег, нижеследующий алгоритм в данном разделе выполняется **только под контролем преподавателя!**

1. Включите лазер (сначала выключатель, далее увеличить ток до 70 мА). Максимальный рабочий ток – 75 мА.
2. Включите коррелятор.
3. Откройте на рабочем столе компьютера программу "Quantum Practicum"(коррелятор должен быть включен до запуска программы).
4. До включения детекторов: Проверьте, что к обоим детекторам подсоединены волокна от каналов, в которых производятся измерения. Проверьте, что перед детекторами поставлены узкополосные фильтры 810(10) нм. Проверьте, что на линзу LA1131-B-ML (установлена сразу после кристалла по ходу луча от лазера) накручен фильтр, блокирующий накачку LP_{600} .

!!! Выключите свет в помещении.

5. Включите детекторы. Через несколько секунд на графиках и в окнах на компьютере в программе "Quantum Practicum" где выводятся единичные отсчеты и совпадения, должны появиться отличные от нуля значения.
6. Установите нужные углы на фазовых пластинах, установленных перед поляризационными светоделителями.
7. Не крутить пластинки относительно шкалы, верить показаниям на шкале, а не риске.

Порядок выключения установки:

1. Выключите детекторы выключателями на удлинителе. Через несколько секунд в программе сигнал с детекторов станет нулевым. **Только после этого можно включать свет!**
2. Закройте программу.
3. Выключите лазер (уменьшите ток до 0 отверткой, далее выключатель).

4.2 Томография квантового состояния кубита

1. Рассчитайте углы поворота фазовых пластин $HW P_{B2}$ и QWP_{B2} , соответствующих изменению средних значений наблюдаемых $\langle \hat{X} \rangle$, $\langle \hat{Y} \rangle$ и $\langle \hat{Z} \rangle$.
2. Включите лазер
3. Подберите углы поворота фазовых пластин $HW P_{B1}$ и QWP_{B1} таким образом, чтобы состояние на выходе было максимально близко к состоянию $|H\rangle$. Для этого поворачивайте пластины до тех пор, пока не будет достигнут максимум числа отчётов на детекторе, который отвечает за измерение числа фотонов прошедших через поляризационный светоделитель без отражения. Запишите полученные углы поворота.
4. Измерьте для этого состояния параметры Стокса s_x, s_y, s_z и отнормируйте эти значения на s_0 . Повторите измерения 10 раз, чтобы по величине статистической погрешности можно было судить об адекватности модели чистого состояния.
5. Повторите пункты 3-4, устанавливая углы фазовых пластин $HW P_{B1}$ и QWP_{B1} таким образом, чтобы получить квантовые состояния максимально близкие к состояниям $|V\rangle, |D\rangle, |A\rangle, |R\rangle$ и $|L\rangle$.
6. Для каждого эксперимента рассчитайте коэффициенты матрицы плотности состояния в параметризации

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s_z & s_x - i s_y \\ s_x + i s_y & 1 - s_z \end{pmatrix}.$$

Найдите её собственные вектора и собственные значения.

7. Рассчитайте верность F для всех экспериментов и сделайте выводы. Результаты расчетов представьте в виде таблицы:

Параметр	Ожидаемое состояние	Измеренное состояние
s_x (с погрешностью)		
s_y (с погрешностью)		
s_z (с погрешностью)		
ρ		
Собственные вектора		
Собственные значения		
Чистота (с погрешностью)		
$F(\rho_{prep}, \rho_0)$		

8. Насколько хорошо измеренные состояния соответствуют ожидаемым? В чем могут быть причины отличия измеренного и ожидаемого состояний?

4.3 Томография однокубитного квантового процесса

1. Выпишите углы поворота фазовых пластин $HW P_{B1}$ и $QW P_{B1}$, использованные в предыдущей части работы, обеспечивающие приготовление квантовых состояний максимально близких к базисным состояниям $|H\rangle$, $|V\rangle$, $|D\rangle$, $|A\rangle$, $|R\rangle$ и $|L\rangle$.
2. Выпишите углы поворота фазовых пластин $HW P_{B2}$ и $QW P_{B2}$, соответствующие измерению параметров Стокса. Для каждого i -го входного состояния определите нормированные j -е параметры Стокса.
3. Проанализируйте данные, полученные в предыдущем задании, как результат томографии единичного (тождественного) преобразования. Определите матрицу B по формуле (53). Определите матричные элементы M_{ij} как значения j -го нормированного параметра Стокса для i -го входного состояния. Значение нормированного параметра s_0 для всех входных состояний примем равным единице. Определите хи-матрицу. Убедитесь, что она совпадает с хи-матрицей единичного преобразования. Если это не так – проверьте расчеты.
4. Попросите преподавателя выставить поляризационный элемент, реализующий квантовый процесс, в канале B между фазовыми пластинами $QW P_{B1}$ и $HW P_{B2}$.
5. Проведите полный набор измерений для томографии неизвестного квантового процесса: подайте на вход по очереди каждое из 4 квантовых состояний максимально близких к ба-

зисным ($|H\rangle, |V\rangle, |D\rangle, |R\rangle$), и для каждого выходного состояния измерьте средние значения всех параметров Стокса.

6. Для каждого i -го входного состояния определите нормированные j -е параметры Стокса выходного состояния.
7. Составьте матрицу измеренных данных M_{ij} каждый элемент которой — это результат измерения j -го нормированного параметра Стокса ($j = 0, x, y, z$) для i -го входного состояния ($i = 1, \dots, 4$) и найдите хи-матрицу исследуемого процесса.
8. Предполагая, что исследуемый процесс описывается одним оператором Крауса, найдите собственные вектора и собственные значения хи-матрицы, и определите оператор Краусса, соответствующий большему собственному значению.
9. Сравните полученный оператор E_{exp} с теоретическим E_{th} . Заполните таблицу:

Параметр	Ожидаемый процесс	Измеренный процесс
Матрица E		
Ее собственные вектора		
Ее собственные значения		
$F(E_{th}, E_{exp})$		

Здесь Fidelity считается по следующей формуле:

$$F(E_{th}, E_{exp}) \equiv \left(\frac{|\text{Col}(E_{th})\text{Col}(E_{exp})^\dagger|}{|\text{Col}(E_{th})||\text{Col}(E_{exp})|} \right)^2 \quad (56)$$

5 Обработка результатов эксперимента, требования к оформлению отчета.

Основные требования к любому отчёту:

Представленная в отчёте информация должна быть необходимой и достаточной для детального воспроизведения исходных, промежуточных и окончательных данных и выводов. Отчёт, в частности, должен содержать:

1. Фамилию, имя, отчество и номер группы студента. Наименование работы и дату её выполнения.
2. Цель работы, постановку задачи
3. Расчётные формулы с указанием единиц измерения и введение всех используемых студентом обозначений.
4. Схему установки с подписанными и пронумерованными элементами
5. Процедуру проведения эксперимента, таблицы и графики первичных результатов измерений
6. Процедуру обработки экспериментальных данных, таблицы и графики результатов эксперимента, результаты вычислений величин и их погрешности. Порядок определения погрешностей. На всех графиках должны быть чётко обозначены оси и единицы измерений, у каждого графика и таблицы должно быть наименование.
7. Результаты вычислений и измерений.
8. Выводы.

Требования к отчёту по данной работе:

Изложенные ниже требования - это необходимые, но не достаточные условия хорошего отчёта. В отчёте по лабораторной работе "Томография квантового состояния" должна в том числе содержаться следующая информация:

1. Результаты прямых измерений параметров Стокса для всех рассматриваемых квантовых состояний света ($|H\rangle, |V\rangle, |D\rangle, |A\rangle, |R\rangle, |L\rangle, \dots$).
2. Восстановленную по результатам томографии матрицу плотности всех томографируемых состояний, её собственные вектора и собственные значения, а также верность. Результат должен быть оформлен в виде таблицы из пункта 7 раздела 4.2

3. Матрицы B, M, χ для тождественного преобразования, сравнение с теоретическими данными.
4. Матрицы B, M, χ для исследуемого квантового процесса, сравнение с теоретическими. Собственные вектора и собственные значения χ -матрицы, матрица оператора Крауса, сравнение с теоретическими данными. Результат должен быть оформлен в виде таблицы из пункта 9 раздела 4.3.

6 Контрольные вопросы

1. В чём отличие чистого состояния от смешанного?
2. Что такое перепутанное состояние? Как можно генерировать перепутанные состояния?
3. Опишите процесс измерения наблюдаемой $\langle Y \rangle$.
4. Какое состояние генерируется в ходе параметрического процесса на нелинейных кристаллах, используемых в работе, и почему?
5. Какие углы поворота пластин $HW P_{B1}$ и $QW P_{B1}$ соответствуют генерации состояния пары фотонов $|H\rangle|H\rangle$?
6. Запишите матрицу плотности чистого однофотонного состояния $|D\rangle$.
7. Что такое верность F ?
8. Запишите хи-матрицу полуволновой фазовой пластинки, установленной под углом 45° ?

Список литературы

1. Blum K. Density matrix theory and applications. – Springer Science and Business Media, 2012. – Т. 64.
2. Scully M. O., Zubairy M. S. Quantum optics. – 1999.
3. Львовский, А. Отличная квантовая механика, Учеб. пособие в 2 ч./ Пер. с англ. Натальи Лисовой – М.: Альпина нон-фикшн, 2019 – 422 с.
4. Квантовые поляризационные состояния фотонов:уч.-метод. пособие/сост.:С.Н. Филиппов. –М.: МФТИ, 2017.– 36 с.